MATHÉMATIQUES — 1re épreuve

OPTION GÉNÉRALE

DURÉE : 4 heures

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Chaque partie peut être considérée comme un tout en majorité indépendant des autres parties.

Dans ce problème le mot « suite » peut désigner une suite (infinie) indexée par $\mathbf{N}$ ou une suite (infinie « aux deux extrémités ») indexée par $\mathbf{Z}$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ vérifiant : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout n de $\mathbf{Z}$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Le but de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.

PRÉLIMINAIRE

1° Calculer u_2, u_{-1}, u_{-2}.

2° Montrer que l'on a ainsi totalement caractérisé une suite définie pour tout n entier relatif.

3° Montrer que tout n de $\mathbf{Z}$, u_n est un élément de $\mathbf{Z}$.

4° Montrer que pour $n \geqslant 5$ on a $u_n \geqslant n$.
En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

PARTIE I

1° On considère l'équation :

$$x^2 = x + 1 \qquad (1)$$

a. Montrer qu'elle a deux racines réelles. Déterminer leur somme et leur produit.
On notera désormais Φ la plus grande de ces racines.

b. Exprimer en fonction de 1 et Φ les nombres Φ^{-1}, Φ^0, Φ^1, Φ^2, Φ^3.

c. En utilisant Φ, exprimer de deux manières l'autre racine de (1).

d. Montrer que pour tout n de $\mathbf{Z}$ il existe un couple d'éléments de $\mathbf{Z}$, (a_n, b_n), tel que : $\Phi^n = a_n + b_n \Phi$.

2° Soit v_n le vecteur (a_n, b_n) de $\mathbf{R}^2$.

a. Démontrer qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbf{R}^2$ tel que pour tout élément n de $\mathbf{Z}$ on ait : $v_{n+1} = h(v_n)$.
Déterminer sa matrice M dans la base $((1, 0), (0, 1))$.

b. La matrice M est-elle inversible ?

c. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbf{Z}$, les coordonnées de v_n s'expriment simplement en fonction de M et des coordonnées de v_0.

d. Diagonaliser la matrice M et en déduire l'expression de M^n, puis une expression de a_n et b_n.

3° *a.* Calculer directement pour $n \in \mathbf{N}$ l'expression de u_n en fonction de n.

b. Déduire de ce qui précède et pour $n \in \mathbf{N}$ l'expression de Φ^n, a_n et b_n en fonction des sommes S_n et T_n définies par :

$$S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k}\, 5^k \qquad T_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_n^{2k+1}\, 5^k$$

où $E(p)$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à p.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

1° Montrer par récurrence que pour n entier strictement positif le rapport $\frac{u_{-n}}{u_n}$ a une forme très simple que l'on déterminera.

On se borne donc pour ce qui suit à l'étude de la suite (u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

2° On considère la matrice $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Déterminer la matrice inverse de N si elle existe.

b. Montrer que pour n entier positif N^n s'exprime simplement au moyen des éléments de la suite (u_n).

c. Établir que pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $u_{n+2}\,u_n - (u_{n+1})^2 = (-1)^{n+1}$.

Ce résultat se généralise-t-il au cas où n est négatif ?

3° Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_n}{u_{n-1}}$ défini pour $n \geqslant 2$.

4° Déterminer pour $n \geqslant 1$ la valeur de : $\dfrac{u_{n+1}\,\Phi + u_n}{u_n\,\Phi + u_{n-1}}$

5° Démontrer que pour $n \geqslant 0$ et $m \geqslant 1$ on a : $u_{n+m} = u_m\,u_{n+1} + u_{m-1}\,u_n$

PARTIE III

On considère la fonction f définie pour x réel par : $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$

1° *a.* Quel est l'ensemble de définition de f ?

b. Déterminer f' et f''.

c. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

2° Démontrer que pour n entier strictement positif on a : $f^{(n)}(x) = \dfrac{n\,!\,[x^{n+1} + \mathrm{P}_n(x)]}{(1 - x - x^2)^{n+1}}$

où P_n désigne un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Donner une relation de récurrence entre P_n et P_{n+1}.

3° *a.* Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\,x^k + x^n\,\epsilon(x)$

où ϵ est une fonction telle que : $\lim_{0} \epsilon = 0$.

b. Montrer que $x\,f(x)$ et $x^2\,f(x)$ admettent des développements limités au même ordre n. En déduire le développement limité de $(x^2 + x - 1)\,f(x)$ à l'ordre n.

c. En utilisant l'égalité : $(x^2 + x - 1)\,f(x) = -x$ donner une relation de récurrence liant les c_n.

d. Montrer que pour n entier positif c_n s'exprime en fonction de u_n.

4° *a.* Établir qu'il existe un entier p tel que pour tout n entier naturel non nul on ait : $\Phi^{n+p-1} \leqslant u_n \leqslant \Phi^{n+p}$

b. Montrer alors que pour x élément de $\left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right[$ la série de terme général $c_n\,x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est convergente.

PARTIE IV

On cherche maintenant le nombre w_n de parties de l'ensemble $\mathrm{E} = \{1, 2, \ldots, n\}$ qui ne contiennent pas deux entiers successifs. Par exemple $\{2, 5\}$ ou l'ensemble vide sont de telles parties. Pour cela on considère le nombre $w_{n,k}$ de parties à k éléments ayant cette propriété.

Tournez la page S.V.P.

1° En citant les parties de E considérées donner les valeurs de w_1, w_2, w_3.

2° On considère l'application H de l'ensemble des parties de E dans l'ensemble des listes formées de n chiffres 0 ou 1 qui, à A, associe la liste des chiffres possédant un 1 à la place j si et seulement si j est élément de A.

Par exemple si E = {1, 2, 3, 4} et A = {1, 4}, alors : H (A) = 1001.

Montrer que H est une bijection.

Les listes de chiffres considérées seront appelées des mots.

3° En remarquant que dans un mot associé à une partie à k éléments ne contenant pas deux entiers successifs un 1 est entièrement déterminé par la place du zéro qui le précède (s'il en existe), montrer que : $w_{n,k} = C_{n-k+1}^{k}$.

4° *a*. Écrire l'expression de w_n.

b. Calculer $w_n + w_{n+1}$.

c. Exprimer w_n en fonction de u_n.

NOTE HISTORIQUE (hors barème !)

La suite (u_n) a été étudiée dès le XIIIe siècle par Léonard de Pise, dit Fibonacci. C'est en 1847 que Lamé en trouva la première application. Les propriétés de cette suite, tant pratiques que théoriques, sont extrêmement nombreuses, au point que depuis 1963 un journal est spécialisé dans leur étude.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail